Jak Arabowie rozwiązywali równania?

Agnieszka Niemczynowicz

Katedra Fizyki Relatywistycznej
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

Niezwykła Matematyka 2016

Co to jest równanie? Kilka dygresji z logiki.

Formą zdaniową zmiennej x nazywamy takie wyrażenie, w którym występuje zmienna x i które staje się zdaniem logicznym, gdy w miejsce x podstawimy dowolny element zbioru D, zwanego dziedziną. Formę zdaniową będziemy oznaczać symbolem $p(x)$.

Przykład Zdanie:

$$x \text{ jest liczbą parzystą}$$

jest formą zdaniową jednej zmiennej x, której dziedziną może być na przykład zbiór liczb naturalnych.

- **Równanie** to forma zdaniowa postaci

$$t_1 = t_2,$$

gdzie t_1, t_2 są termami i przynajmniej jeden z nich zawiera pewną zmienną.

- Term po lewej stronie znaku równości nazywa się lewą stroną równania, a term po prawej – prawą stroną równania. Szczególnym przypadkiem równania jest forma, w której jeden z termów jest stałą np. 0, czyli gdy jest postaci $t_1 = 0$.
- Zmienne równania oznacza się zwykle symbolami literowymi i nazywa niewiadomymi.

Źródło: Atlas matematyki

Wybrane rodzaje równań

- Równanie algebraiczne – każde równanie postaci $P(x) = 0$, gdzie P jest wielomianem. W szczególności, gdy P jest stopnia drugiego jest to równanie kwadratowe, a gdy P jest stopnia pierwszego jest to równanie liniowe.

Przykład

$$x + 3 = 2x - 13$$

Wybrane rodzaje równań

- Równanie diofantyczne – równanie, którego rozwiązania szuka się w zbiorze liczb całkowitych lub naturalnych.

Przykład

$$x^2 = y^2 + 2y + 12$$

Wybrane rodzaje równań

- Równanie funkcyjne, np. równanie różniczkowe lub równanie całkowe.

  Przykład

$$\frac{dy}{dx} + 2x \cdot y^2 = 8$$

Szkolne równania

Dwa wyrażenia algebraiczne lub algebraiczne z arytmetycznym połączone znakiem równości.

Przykłady

$$5x - \sqrt{2} = 2x + \sqrt{3}$$

$$x^2 + 5x - 8 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 = x$$

Źródło: podręcznik matematyki do gimnazjum

Równanie kwadratowe

Najstarsze równania kwadratowe (około 4000 lat temu) znalezione zostały na glinianych tabliczkach pochodzacych od Sumerów, ludu zamieszkującego tereny dzisiejszego Iraku (poprzednio nazywanego Babilonią, Asyrią, Mezopotamią, itd.)

Do tej pory nie umiemy zrozumieć metody, jaką stosowali Sumerowie do rozwiązywania równań kwadratowych.

Rozwiązywanie równań kwadratowych

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \text{ - współczynniki}$$

Wyróżnik

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta > 0,\ x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = 0,\ x_0 = \frac{-b}{2a}$$

$$\Delta < 0,\ \text{ brak rozwiązań}$$

Rozwiązywanie równań kwadratowych

z księgi *Metrica* Herona z Aleksandrii

Zadanie

Znaleźć bok kwadratu, którego suma pola i obwodu wynosi 896.

Rozwiązywanie równań kwadratowych

Sposób grecki - uzupełnianie do kwadratu

$$x^2 + 4x = 896$$

$$x^2 + 4x + 4 = 900$$

$$(x + 2)^2 = 30^2$$

$$x = 28$$

Otrzymano tylko rozwiązanie dodatnie, gdyż w owym czasie liczb ujemnych nie uznawano!

Rozwiązywanie równań kwadratowych - sposób grecki

Zamiast równania

$$x^2 + sx + t = 0$$

piszemy równanie

$$x^2 + sx + \left(\frac{s}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{s}{2}\right)^2 - t\right) = 0$$

O ile zawartośc drugiego nawiasu jest dodatnia, a więc jest kwadratem jakiejś liczby, stosuje się wzór na różnicę kwadratów. Ostatecznie otrzymujemy

$$\left(x + \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{2} - t}\right)\left(x + \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{2} - t}\right) = 0.$$

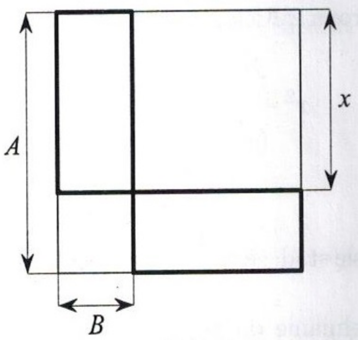
Rozwiązywanie równań kwadratowych - sposób Arabów

Wynalazcy algebry, Arabowie, do rozwiązywania równań kwadratowych używali metody geometrycznej.

W rogu kwadratu o boku A wycinamy kwadrat o boku B. Jednocześnie w przeciwległym rogu wycinamy kwadrat stykający się rogiem z wyciętym kwadratem; oznaczmy jego bok przez x.

Co zostało?

Rozwiązywanie równań kwadratowych - sposób Arabów



Co zostało?

Rozwiązywanie równań kwadratowych - sposób Arabów

Rachunek pól wygląda następująco:

$$A^2 = B^2 + 2Bx + x^2,$$

czyli

$$x^2 + 2Bx = A^2 - B^2.$$

Ponadto $x = A - B$.

Rozwiązywanie równań kwadratowych - sposób Arabów

Dowolne równanie postaci

$$x^2 + ax = b, \quad \text{gdzie } a > 0 \text{ i } b > 0,$$

można zatem potraktować jako odnoszące się do przedstawionej wyżej sytuacji geometrycznej. Wówczas $a = 2B$ i $b = A^2 - B^2$. Stąd, za pomocą a i b, możemy obliczyć A i B, a więc i x. Mamy

$$B = \frac{a}{2}, \quad B^2 = \frac{a^2}{4}, \quad A^2 = b + \frac{a^2}{4},$$

skąd

$$x = A - B = \sqrt{A^2} - B = \sqrt{b + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}.$$

Rozwiązywanie równań kwadratowych - sposób Arabów

Konsekwencje !

- nie wszystkie równania da się „zmieścić” w metodzie geometrycznej, wymagane jest $a > 0, \ b > 0$.
- mamy zapewnione istnienie rozwiązania.

Rozwiązywanie równań kwadratowych - sposób Arabów

Gdzie się ukrył drugi pierwiastek?

Rozwiązywanie równań kwadratowych - sposób Arabów

Gdzie się ukrył drugi pierwiastek?

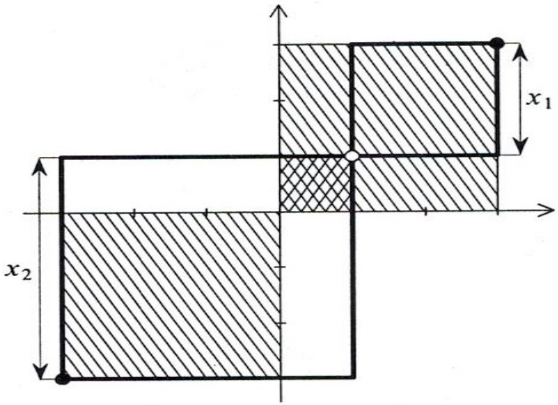
Jedyne miejsce, gdy, przechodząc do geometrycznej interpretacji, coś pominęliśmy to fakt, że są dwie liczby, których kwadrat jest równy A^2 - my użyliśmy tylko dodatniej, bo miała to być długość.

Jak narysować taki rysunek, na którym byłby widoczne obie możliwości?

Rozwiązywanie równań kwadratowych - sposób Arabów

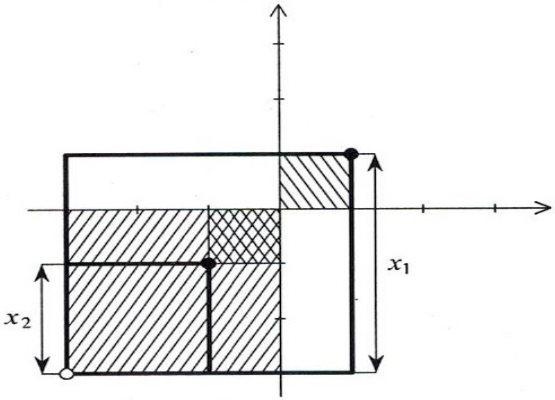
Poruszanie się w górę i w prawo odpowiada liczbom dodatnim, a w lewo i w dół - ujemnym.

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$



Rozwiązywanie równań kwadratowych - sposób Arabów

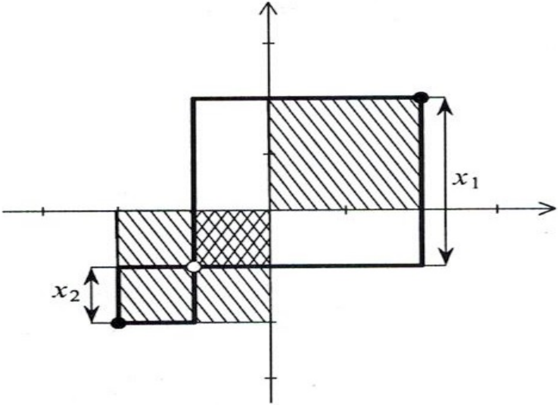
Przykład $x^2 - 6x + 8 = 0.$



$x^2 - 6x + 8 = 0;\ A^2 = 1,\ B = -3.$

Rozwiązywanie równań kwadratowych - sposób Arabów

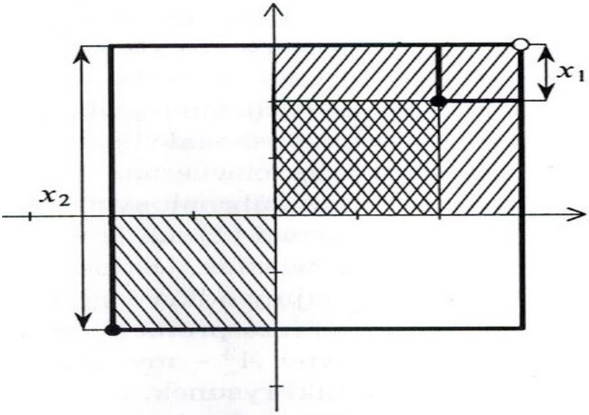
Przykład $x^2 - 2x - 3 = 0$.



$x^2 - 2x - 3 = 0;\ A^2 = 4,\ B = -1.$

Rozwiązywanie równań kwadratowych - sposób Arabów

Przykład $x^2 + 6x + 5 = 0.$



$x^2 + 6x + 5 = 0;\ A^2 = 4,\ B = 3.$

Rozwiązywanie równań kwadratowych - sposób Arabów

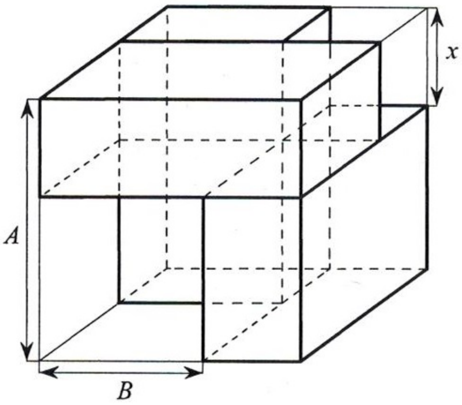
Czy nie udało się nam zbyt wiele? - przecież nie każde równanie kwadratowe ma pierwiastki.

Nie ! Pokazane zostało jedynie, jak rozwiązywać równania, dla których obliczone A^2 jest nieujemne. W przeciwnym razie nie można narysować A ani w dodatnią, ani w ujemną stronę.

Wzory na rozwiązania równania stopnia 3

Jeśli w rogu sześcianu o krawędzi A wytniemy sześcian o krawędzi B, to możemy wyciąć w przeciwległym rogu, stykający się rogiem z pierwszym wyciętym, sześcian, którego krawędź oznaczamy x.

Wzory na rozwiązania równania stopnia 3



Wzory na rozwiązania równania stopnia 3

Rachunek objętości:

$$A^3 = B^3 + x^3 + 3ABx,$$

czyli

$$x^3 + 3ABx = A^3 - B^3,$$

przy czym $x = A - B$.

Wzory na rozwiązania równania stopnia 3

Możemy więc dowolne równanie postaci

$$x^3 + px = q,$$

gdzie $p > 0$ i $q > 0$, uważać za związane z narysowanymi sześcianami. Daje to zależność

$$p = 3AB \quad \text{i} \quad q = A^3 - B^3.$$

Stoimy więc przed problemem wyznaczenia z tych zależności A i B, gdy dane są p i q.

Wzory Nicolo Fontana, 1535 rok

Nie każdy to widzi od razu, ale jest to równanie stopnia 2. Istotnie, oznaczmy $u := A^3$ i $v := B^3$. Mamy wówczas

$$uv = \frac{p^3}{27} \quad \text{i} \quad u - v = q,$$

skąd

$$u(u-q) = \frac{p^3}{27}, \quad \text{czyli} \quad u^2 - qu - \frac{p^3}{27} = 0,$$

co daje nam rozwiązania

$$u = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2} \quad \text{i} \quad v = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2},$$

a stąd otrzymujemy rozwiązanie równania

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}.$$

Zadanie

Jaki ma pierwiastek równanie $x^3 + 9x = 26$?

Wzory Nicolo Fontana

Ograniczenia !

- brak wyrazu zawierającego druga potęgę - ograniczenie pozorne, bo podstawienie $x = y - \frac{r}{3}$ sprowadza równanie $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$ do równania stopnia 3 względem y nie zawierającego już drugiej potęgi y.
- współczynniki równania: $p > 0,\ q > 0$???

Wzory Nicolo Fontana

Rozwiążmy

$$x^3 - 6x - 9 = 0, \quad x^3 - 6x + 9 = 0, \quad x^3 + 6x + 7 = 0.$$

Wzory Nicolo Fontana

Okazuje się, że wzory Fontana działają dobrze, wszędzie tam, gdzie daję się wyciągnąć pierwiastek kwadratowy.

Literatura

- H. S. M. Coxter, *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*
- S. Kulczycki, *Z dziejów matematyki greckiej*
- M. Kordos, *Zobaczyć to czego nie widać*

Dziękuję za uwagę