

# **IX Północne Spotkania Geometryczne**

Wydział Matematyki i Informatyki  
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

ul. Słoneczna 54, 10-710 Olsztyn

Olsztyn 27-28 czerwca 2015

# Spis uczestników

Imię i Nazwisko	Afiliacja	E-mail
<b>Bogdan Balcerzak</b>	Instytut Matematyki, Politechnika Łódzka	<i>bogdan.balcerzak@p.lodz.pl</i>
<b>Edyta Bartnicka</b>	Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie	<i>edytabartnicka@wp.pl</i>
<b>Waldemar Cieślak</b>	Politechnika Lubelska	<i>izacieslak@wp.pl</i>
<b>Adam Doliwa</b>	Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie	<i>doliwa@matman.uwm.edu.pl</i>
<b>Jan Jakóbowski</b>	Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie	<i>jjakob@matman.uwm.edu.pl</i>
<b>Sławomir Kapka</b>	Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Łódzki	<i>kapka@math.uni.lodz.pl</i>
<b>Anna Kaźmierczak</b>	Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Łódzki	<i>akaz@math.uni.lodz.pl</i>
<b>Jarosław Kosiorek</b>	Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie	<i>kosiorek@matman.uwm.edu.pl</i>
<b>Mariusz Kwiatkowski</b>	Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie	<i>mkw@matman.uwm.edu.pl</i>
<b>Andrzej Matraś</b>	Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie	<i>matras@uwm.edu.pl</i>
<b>Witold Mozgawa</b>	Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie	<i>mozgawa@poczta.umcs.lublin.pl</i>
<b>Michał Musielak</b>	Instytut Matematyki i Fizyki, Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy	<i>michal.musielak@utp.edu.pl</i>
<b>Agnieszka Najberg</b>	Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Łódzki	<i>agakapusta@wp.pl</i>
<b>Monika Nowicka</b>	Instytut Matematyki i Fizyki, Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy	<i>mnowicka@utp.edu.pl</i>
<b>Andriy Panasyuk</b>	Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie	<i>panas@matman.uwm.edu.pl</i>

Imię i Nazwisko	Afiliacja	E-mail
<b>Mark Pankov</b>	Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie	<i>pankov@matman.uwm.edu.pl</i>
<b>Krzysztof Petelczyc</b>	Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet w Białymstoku	<i>kryzpet@math.uwb.edu.pl</i>
<b>Małgorzata Prażmowska</b>	Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet w Białymstoku	<i>malgpraz@math.uwb.edu.pl</i>
<b>Krzysztof Prażmowski</b>	Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet w Białymstoku	<i>kryzpraz@math.uwb.edu.pl</i>
<b>Artur Siemaszko</b>	Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie	<i>artur@uwm.edu.pl</i>
<b>Izabela Stępnia</b>	Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Łódzki	<i>izulka146@wp.pl</i>
<b>Andrzej Szczepański</b>	Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Gdański	<i>aszczepa@mat.ug.edu.pl</i>
<b>Aleksy Tralle</b>	Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie	<i>tralle@matman.uwm.edu.pl</i>
<b>Artur Woike</b>	Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie	<i>awoike@matman.uwm.edu.pl</i>
<b>Łukasz Zielonka</b>	Instytut Matematyki i Fizyki, Uniwersytet Technologiczno- Przyrodniczy im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy	<i>lukasz.zielonka@utp.edu.pl</i>
<b>Mariusz Żynel</b>	Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet w Białymstoku	<i>mariusz@math.uwb.edu.pl</i>

**Bogdan Balcerzak**

Instytut Matematyki, Politechnika Łódzka  
ul. Wólczańska 215, 90-924 Łódź

*bogdan.balcerzak@p.lodz.pl*

## **Egzotyczne klasy charakterystyczne dla algebroidów Liego**

Przedstawiona będzie konstrukcja egzotycznych klas charakterystycznych dla pewnych par rozszerzeń pseudoalgebr Liego oraz przykłady klas charakterystycznych dla modułów wyposażonych w niezdegenerowane odwzorowanie dwuliniowe. W szczególności omówione będą charakterystyczne klasy egzotyczne dla par algebroidów Liego oraz płaskiej koneksji.

---

**Edyta Bartnicka**

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

*edytabartnicka@wp.pl*

## **Graf relacji łączalności wolnych podmodułów cyklicznych**

Niech  $R$  będzie pierścieniem skończonym łącznym z jedyneką. Opisuję grafy relacji łączalności wolnych podmodułów cyklicznych  $R(a, b)$  generowanych przez pary dopuszczalne. Pokazuję, że są one spójne, regularne, a stopień wierzchołka jest równy rzędowi pierścienia  $R$ . Ponadto, przedstawiam graf jako sumę rozłączną klik maksymalnych i dowodzę, że grafy nieizomorficznych pierścieni lokalnych tego samego rzędu z taką samą strukturą ideałów maksymalnych są izomorficzne. Wynika to z faktu, że liczba elementów klikki maksymalnej w przypadku pierścieni lokalnych jest równa  $R/M + 1$ , gdzie  $M$  jest ideałem maksymalnym pierścienia  $R$ . Pozwala to scharakteryzować grafy dowolnych pierścieni przemiennych (także nielokalnych). Opisuję również własności grafów w przypadku, gdy  $R$  jest pierścieniem nielokalnym nieprzemiennym. Podaję charakterystykę grafów pewnych pierścieni o rzędach będących potęgami liczb pierwszych.

**Waldemar Cieślak**

Politechnika Lubelska

*izacieslak@wp.pl*

## **Twierdzenia typu Holditcha**

W 1858 roku H.Holditch opublikował następujące twierdzenie: Odcinek, którego oba końce leżą na danej zamkniętej krzywej wypukłej  $C$ , ślizga się po krzywej. Punkt  $P$ , który dzieli odcinek w stosunku  $a:b$ , wykreśla pewną krzywą  $C(P)$ . Pole pierścienia ograniczonego przez  $C$  i  $C(P)$  wynosi  $\pi ab$ . W 1981 A.Broman uogólnił wynik Holditcha i podał pewne zastosowania tego twierdzenia.

Podamy konstrukcję, istotnie różniącą się od konstrukcji Holditcha, która prowadzi do twierdzeń podobnych do wyniku Holditcha. Jedną z różnic między konstrukcją Holditcha a naszą polega na budowie rozważanego pierścienia. Pierścień rozpatrywany przez Holditcha leży we wnętrzu obszaru ograniczonego przez  $C$ , w przeciwieństwie do naszego pierścienia, który leży w zewnątrz. Ponadto, podamy warunek, kiedy odcinek, którego końce leżą na  $C$ , może ślizgać się po  $C$ .

---

**Adam Doliwa**

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

*doliwa@matman.uwm.edu.pl*

## **Odwzorowanie Yanga-Baxtera w zmiennych nieprzemiennej**

Przedstawimy rodzinę rozwiązań funkcyjnego równania Yanga-Baxtera w dowolnej liczbie zmiennych nieprzemiennej. Wersja przemiennej tych odwzorowań była studiowana przez Kashiwarę i Etingova w kontekście tzw. baz krystalicznych. Geometryczny sens omawianych odwzorowań jest opisany twierdzeniem Desarguesa w przestrzeni rzutowej nad pierścieniem z dzieleniem. Algebraicznie, odwzorowania te mogą być otrzymane przez nałożenie redukcji periodycznej na nieprzemienne równania Hiroty.

**Anna Kaźmierczak**

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Łódzki

*akaz@math.uni.lodz.pl*

## **O pewnym kryterium konforemności dyfeomorfizmu**

W pracy doktorskiej pt. „Moduły rodzin foliacji transwersalnych” sformułowałam warunki wystarczające konforemności dyfeomorfizmu. Większość tego typu kryteriów, które można spotkać w literaturze, odwołuje się do własności wszystkich rodzin krzywych w otoczeniu punktu. W odróżnieniu od nich, to kryterium wymaga jedynie znalezienia odpowiedniej liczby 1-wymiarowych lokalnych foliacji wzajemnie ortogonalnych, o określonych własnościach.

---

**Mariusz Kwiatkowski**

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

*mkw@matman.uwm.edu.pl*

## **O odległości niezdegenerowanych kodów liniowych**

Kodem liniowym nad ciałem skończonym  $F_q$  nazywamy dowolną podprzestrzeń przestrzeni wektorowej  $V = F_q^n$ . Kod nazywamy niezdegenerowanym jeżeli nie jest zawarty w jądrze żadnego z funkcjonałów  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow x_i$  dla  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Grafem Grassmanna nazywamy graf którego wierzchołkami są  $k$  wymiarowe podprzestrzenie przestrzeni  $V$ , a krawędziami pary podprzestrzeni których wymiar przecięcia jest równy  $k-1$ . Pokażę że Graf Grassmanna ograniczony do kodów niezdegenerowanych, ma średnicę maksymalnie o 1 większą od grafu Grassmanna. Przedstawię kiedy odległości między kodami niezdegenerowanymi w obu grafach mogą się różnić, oraz podam konstrukcję kodów niezdegenerowanych o takiej własności.

**Andrzej Matraś, Artur Siemaszko**

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

*matras@uwm.edu.pl, artur@uwm.edu.pl*

## **Graf odległości prostej rzutowej nad pierścieniem $Z$**

Przedstawione zostanie rozwiązanie problemu znalezienia najkrótszej drogi między punktami grafu odległości prostej rzutowej nad pierścieniem  $Z$ . Wskazane zostaną warunki gwarantujące jednoznaczność tej drogi oraz algorytm pozwalający obliczać długość tej drogi.

---

**Witold Mozgawa**

Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie

*mozgawa@poczta.umcs.lublin.pl*

## **W poszukiwaniu miary w poryźmie Ponceleta**

Przedstawimy prostą i geometryczną konstrukcję nieimienniczej miary w poryźmie Ponceleta.

## Michał Musielak

Instytut Matematyki i Fizyki, Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy im. Jana  
i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy

*michal.musielak@utp.edu.pl*

### Ciała wypukłe zredukowane na sferze

Sferyczne ciało wypukłe nazywamy zredukowanym, jeśli wszystkie ściśle zawarte w nim ciała wypukłe mają szerokość mniejszą od niego. W swoim odczycie omówię definicję szerokości ciała sferycznego oraz przedstawię aktualny stan wiedzy na temat sferycznych ciał zredukowanych (z uwzględnieniem swoich badań). W szczególności przedstawię twierdzenie pozwalające opisać kształt takich ciał o szerokości mniejszej niż połowa  $\pi$  oraz fakt, że jedynymi ciałami zredukowanymi o szerokości co najmniej połowa  $\pi$  są ciała o stałej szerokości. Poruszę także temat średnicy ciała wypukłego zredukowanego na sferze.

---

## Monika Nowicka

Instytut Matematyki i Fizyki, Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy im. Jana  
i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy

*mnowicka@utp.edu.pl*

### Miara symetrii osiowej ze względu na zgięcie trójkątów

Niech  $K$  będzie ciałem wypukłym płaszczyzny euklidesowej  $E^2$ . Prosta  $m$  przechodząca przez pewien punkt ciała  $K$  dzieli to ciało na dwie części. Jeżeli odbicie lustrzane względem  $m$  którejś z tych części jest zawarte w  $K$ , to część tę oznaczamy przez  $K(m)$ . Lassak [Approximation of convex bodies by axially symmetric bodies, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), str. 3075-3084] zasugerował rozważenie miary symetrii osiowej:  $masf(K) = 2 \max_m |K(m)|/|K|$  gdzie  $|K|$  oznacz pole ciała wypukłego  $K$ . Miarę  $masf$  nazywamy miarą symetrii osiowej ze względu na zgięcie. Celem referatu jest pokazanie, że dla każdego trójkąta  $T$  zachodzi nierówność  $masf(T) > (\sqrt{17}-1)/4$ .



**Mark Pankov**

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

*pankov@matman.uwm.edu.pl*

## **Metryczna charakteryzacja apartamentów w Grassmannianach**

Rozważamy Grassmanniany budynków Titsa typu  $A_n$ ,  $B_n=C_n$  i  $D_n$ . Opisujemy wszystkie przypadki w których apartamenty mogą być scharakteryzowane jako izometryczne włożenia odpowiednich grafów.

---

**Krzysztof Petelczyc**

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet w Białymstoku

*kryzpet@math.uwb.edu.pl*

## **Współpłaszczyznowość prostych w rzutowej przestrzeni Grassmanna**

Rozważamy zbiór prostych  $L$  wraz z binarną relacją współpłaszczyznowości  $\pi$  w rzutowej przestrzeni Grassmanna  $M$ . W  $M$  mamy dwa typy mocnych podprzestrzeni: gwiazdy i układy. Załóżmy, że (\*) gwiazdy lub układy są rzutowymi przestrzeniami wymiaru co najmniej 4. Wówczas w systemie  $(L, \pi)$  konstruujemy przestrzeń wiązek, którą możemy utożsamić z wyjściową przestrzenią  $M$ . Jeśli założenie (\*) nie jest spełnione, to w większości przypadków jesteśmy w stanie zdefiniować  $M$  w  $(L, \pi)$  innymi technikami, przy pomocy twierdzenia Chow'a. W rezultacie otrzymujemy następujące Twierdzenie: Jeśli maksymalne mocne podprzestrzenie przestrzeni  $M$  są co najmniej płaszczyznami oraz nie są one wszystkie wymiaru 2, ani nie są one wszystkie wymiaru 3, to  $M$  i struktura  $(L, \pi)$  są definicyjnie równoważne.

## **Małgorzata Prażmowska**

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet w Białymstoku

*malgpraz@math.uwb.edu.pl*

### **Dwumianowe częściowe STSy zawierające grafy pełne**

Bada się tu częściowe STSy rozważając zawarte w nich grafy pełne i struktury jakie te podgrafy tworzą w minimalnych częściowych STSach, które nazywaliśmy dwumianowymi. Podana jest też reprezentacja dwumianowych częściowych STSów zawierających co najmniej ustaloną liczbę maksymalnych podgrafów pełnych jako pewnych systemów perspektyw. Na końcu dowodzimy że dla każdej (odpowiedniej) liczby naturalnej istnieje dwumianowy częściowy STS zawierający tę liczbę maksymalnych grafów pełnych. Jest to wspólna praca z K. Prażmowskim.

---

## **Krzysztof Prażmowski**

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet w Białymstoku

*krzypraz@math.uwb.edu.pl*

### **Hiperpłaszczyzny w konfiguracjach dwumianowych**

Skutecznym narzędziem klasyfikacji konfiguracji dwumianowych (dokładniej: dwumianowych częściowych systemów Steinera) jest ogląd ich maksymalnych podgrafów pełnych. Równoważne temu jest badanie struktury pewnych hiperpłaszczyzn. W komunikacie przedstawimy pewne zagadnienia związane z wyznaczaniem (wszystkich) hiperpłaszczyzn danych konfiguracji dwumianowych. Jest to wspólna praca z M. Prażmowską.

**Andrzej Szczepański**

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Gdański

*aszczepa@mat.ug.edu.pl*

## **Geometria grup krystalograficznych**

$G$  jest grupą krystalograficzną wtedy i tylko wtedy gdy jest dyskretną i kowartą podgrupą izometrii  $R^n$ . Podam metody konstrukcji (dla dowolnego  $n > 1$ )  $n$ -wymiarowej grupy krystalograficznej z trywialnym centrum i trywialną grupą automorfizmów zewnętrznych.

---

**Łukasz Zielonka**

Instytut Matematyki i Fizyki, Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy

*lukasz.zielonka@utp.edu.pl*

## **Pakowanie online prostokątów**

Przez ciało wypukłe w  $d$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej rozumiemy zbiór zwarty, wypukły o niepustym wnętrzu. Mówimy, że ciąg ciał wypukłych  $(C_n)$  można upakować w ciało wypukłe  $C$ , jeśli każdy ze zbiorów  $C_n$  można tak przesunąć i obrócić, by zbiory te były podzbiorem  $C$  i miały parami rozłączne wnętrza.

W wersji online pakowania na wstępie nie znamy ani kształtu, ani wielkości pakowanych ciał  $C_1, C_2, \dots$ . Na początku wiemy tylko jak wygląda  $C_1$ . Dla każdego  $i > 1$  dopiero po definitywnym położeniu ciała  $C_{i-1}$  (tego ciała nie można już przesunąć) dowiadujemy się o kształcie ciała  $C_i$ .

Celem referatu jest przedstawienie metody pakowania online prostokątów o bokach długości nie większej niż 1 do jednostkowego kwadratu. Wykorzystując ten algorytm można pokazać, że dowolny ciąg prostokątów o bokach długości nie większej niż 1, których suma powierzchni jest nie większa niż  $95/324 - \sqrt{21}/486 \approx 0,28378$  można upakować w jednostkowy kwadrat.

**Mariusz Żynel**

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet w Białymstoku

*mariusz@math.uwb.edu.pl*

## **Współpłaszczyznowość prostych w biegunowej przestrzeni Grassmanna**

To wystąpienie jest kontynuacją referatu o współpłaszczyznowości prostych w rzutowej przestrzeni Grassmanna. Rozważamy tutaj zbiór prostych  $L$  i binarną relację współpłaszczyznowości  $\pi$  w biegunowej przestrzeni Grassmanna  $M$  i dowodzimy analogiczne twierdzenie jak dla rzutowej przestrzeni Grassmanna, że w przypadku, gdy maksymalne mocne podprzestrzenie przestrzeni  $M$  są co najmniej wymiaru 2, ale nie wszystkie są wymiaru 2, ani nie wszystkie są wymiaru 3, to  $M$  i struktura  $(L, \pi)$  są definicyjnie równoważne. Generalnie idea rozumowania w tym wypadku pozostaje taka sama, musimy jedynie wziąć pod uwagę specyfikę biegunowej przestrzeni Grassmanna, gdzie elementy jednej z dwu rodzin maksymalnych mocnych podprzestrzeni, gwiazdy, mogą przecinać się dowolnie – inaczej niż w rzutowej przestrzeni Grassmanna, gdzie te przekroje to najwyżej punkty. W konsekwencji proste nie mają jednoznacznych rozszerzeń do gwiazd. Inaczej też przecinają się gwiazdy z układami, czyli elementami drugiej rodziny maksymalnych mocnych podprzestrzeni. Te przekroje jeśli nie są puste to punkty lub proste. Pomimo tych różnic udało się wyabstrahować wspólne, kluczowe własności relacji współpłaszczyznowości  $\pi$ .

# Program Konferencji

## IX Północne Spotkania Geometryczne

27-28 czerwca 2015, Wydział Matematyki i Informatyki,  
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

### **27 czerwca 2015, sobota, Aula C/1**

**8:50 – Otwarcie Konferencji**

#### **Sesja 1, 9:00-10:00,**

**9:00-9:25 – Bogdan Balcerzak**, Egzotyczne klasy charakterystyczne dla algebroidów Liego.

**9:30-9:55 – Anna Kaźmierczak**, O pewnym kryterium konforemności dyfeomorfizmu.

**10:00-10:30 Przerwa na kawę/herbatę**

#### **Sesja 2, 10:30-12:00**

**10:30-10:55 – Andrzej Szczepański**, Geometria grup krystalograficznych.

**11:00-11:25 – Małgorzata Prażmowska**, Dwumianowe częściowe STSy zawierające grafy pełne.

**11:30-11:55 – Krzysztof Prażmowski**, Hiperpłaszczyzny w konfiguracjach dwumianowych.

**12:00-14:30 Przerwa na obiad**

#### **Sesja 3, 14:30-16:00**

**14:30-14:55 – Witold Mozgawa**, W poszukiwaniu miary w poryźmie Ponceleta.

**15:00-15:25 – Andrzej Matraś**, Graf odległości prostej rzutowej nad pierścieniem  $Z$ .

**15:30-15:55 – Edyta Bartnicka**, Graf relacji łączalności wolnych podmodułów cyklicznych.

**16:00-16:30 Przerwa na kawę/herbatę**

#### **Sesja 4, 16:30-17:30**

**16:30-16:55 – Krzysztof Petelczyc**, Współpłaszczyznowość prostych w rzutowej przestrzeni Grassmanna.

**17:00-17:25 – Mariusz Żynel**, Współpłaszczyznowość prostych w biegunowej przestrzeni Grassmanna.

## **28 czerwca 2015, niedziela, Aula C/1**

### **Sesja 5, 9:00-10:00**

**9:00-9:25** – Waldemar Cieślak, Twierdzenia typu Holditcha.

**9:30-9:55** – Monika Nowicka, Miara symetrii osiowej ze względu na zgięcie trójkątów.

**10:00-10:20** Przerwa na kawę/herbatę

### **Sesja 6, 10:20-11:20**

**10:20-10:45** – Michał Musielak, Ciała wypukłe zredukowane na sferze.

**10:50-11:15** – Łukasz Zielonka, Pakowanie online prostokątów.

**11:20-11:40** Przerwa na kawę/herbatę

### **Sesja 7, 11:40-13:05**

**11:40-12:05** – Mariusz Kwiatkowski, O odległości niezdegenerowanych kodów liniowych.

**12:10-12:35** – Mark Pankov, Metryczna charakteryzacja apartamentów w Grassmannianach.

**12:40-13:05** – Adam Doliwa, Odwzorowanie Yanga-Baxtera w zmiennych nieprzemiennej.