Aleksander Strasburger
dr hab. nauk matematycznych, profesor SGGW
Katedra Zastosowań Matematyki Informatyki
Wydział Zastosowań Informatyki i Matematyki
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego

ul. Nowoursynowska 166,
02-787 Warszawa.

Warszawa, 10 listopada 2013

Recenzja rozprawy doktorskiej
Uogólnione, Symplektyczne Przestrzenie Symetryczne
przedstawionej przez mgr Macieja Franciszka Bocheńskiego
Radzie Wydziału Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie

Rozprawa doktorska mgr Macieja F. Bocheńskiego dotyczy aktualnych i ważnych zagadnień teorii rozmaitości symplektycznych. Głównym jej wynikiem, który jest niewątpliwie ważnym osiągnięciem autora, jest dokonanie pełnej klasyfikacji rozmaitości symplektycznych wyposażonych w indeksowaną punktami tej rozmaitości rodzinę symplektomorfizmów rzędu 3, spełniającą pewne dodatkowe założenia. Takie przestrzenie symplektyczne autor nazywa 3-symetrycznymi przestrzeniami symplektycznymi, w analogii do (riemannowskich) przestrzeni symetrycznych, które wyróżnione są posiadaniem analogicznej rodziny inwolutywnych izometrii. Definicje tę wywodzi autor z monografii O. Kowalskiego *Generalized symmetric spaces*, choć jak się wydaje największą zasługę, jeśli nie samo autorstwo tej koncepcji, należy przypisać O. Loosowi, którego wyniki są przedstawione w dwutomowej monografii jego autorstwa *Symmetric Spaces I,II*, wydanej w 1969 r i wyprzedzającej o wiele lat monografię O. Kowalskiego. W niej w szczególności podana jest klasyfikacji przestrzeni symetrycznych, niekoniecznie wyposażonych w strukturę przestrzeni Riemanna, oparta na analogicznej koncepcji studium rodziny inwolutywnych automorfizmów i podobnie jak w omawianej rozprawie wykorzystującego redukcję do modelu algebraicznego zbudowanego w oparciu o algebrę Liego grupy automorfizmów tej struktury generowanej przez wyróżnioną rodzinę inwolucji. Wydaje się, ze monografia O. Loosa powinna znaleźć się w spisie literatury rozprawy doktorskiej poswięconej podobnej tematyce.

Rozprawa mgr Macieja F. Bocheńskiego obejmuje cztery rozdziały plus krótki, jednostronicowy wstęp i jest wyjątkowo zwięzła (zbyt zwięzła, zdaniem piszącego te słowa), bo liczy tylko 36 stron. Wydaje się, że autor rozprawy adresuje ją do wąskiego grona specjalistów z tej dziedziny i dlatego nie uważa za potrzebne opowiadanie o sprawach im dobrze znanych. W rezultacie jednak traci możliwość szerszego przedstawienia kontekstu, w jakim plasuje się jego rozprawa i umiejscowienie jej rezultatów w obrębie aktualnego stanu wiedzy. W liczącym osiem stron Rozdziale 2 przedstawione są preliminaria — podstawowe definicje i fakty — dotyczące geometrii symplektyczej i teorii grup Liego. Jako przykład wspomnianej wyżej, moim zdaniem zbyt daleko idącej zwięzłości podam następujący passus z rozprawy (str. 9). Po podaniu definicji grupy Liego (Definicja 2.9) autor pisze: „Z każdą grupą Liego stowarzyszyć można jednoznacznie obiekt nazywany algebrą Liego:" po czym podaje definicję tychże, nie objaśniając sposobu tego „stowarzyszenia", zapewne w przekonaniu, że każdy to dobrze wie. Jednakże w kolejnym kroku, definiując reprezentację dołączoną grupy Liego, czuje się zobowiązany dorzucić tytułem wyjaśnienia, „gdzie $\mathfrak{g}$ (utożsamiane w tym wypadku z T_eG) jest algebrą Liego grupy G". N.b. po drodze pojawia się myląca „literówka" — w przedostatnim wierszu na stronie 9 jako dziedzina odwzorowania π powinna być wskazana grupa Liego G, a nie jej algebra Liego $\mathfrak{g}$. Na tym stowarzyszeniu oparta jest konstrukcja podstawowego dla rozprawy narzędzia algebraicznego — wprowadzone dalej symplektyczne k-symetryczne trójki, zbudowane z algebry Liego odpowiedniej grupy Liego i odpowiednio dobranego jej automorfizmu. Te ostatnie są kluczowym elementem użytym przez autora do osiągnięcia końcowego rezultatu rozprawy o klasyfikacji 3-symetrycznych rozmaitości symplektycznych i dlatego dobrze byłoby umieścić je na wyraźniej zarysowanym tle. Przy redakcji rozprawy doktorskiej obowiązują przecież nieco inne reguły niż przy pisaniu doniesienia badawczego do specjalistycznego czasopisma.

Rozdział 3 zatytułowany „Symplektyczne rozmaitości k-symetryczne" obejmujący również osiem stron, omawia podstawowe dla pracy pojęcie regularnej s-rozmaitości symplektyczej, z którego przez specjalizację, to jest nakładając na symetrie warunek okresowości rzędu k, dochodzi się do pojęcia k-symetrycznej rozmaitości symplektycznej. W kolejnych krokach pokazuje się istnienie bijektywnej odpowiedniości między klasą k-symetrycznych regularnych i spójnych rozmaitości z wyróżnionym punktem z jednej strony i spełniającymi odpowiednie warunki jednorodnymi rozmaitościami postaci G/H, (G spójna grupa Liego, $H \subset G$ domknięta podgrupa) z wyróżnionym automorfizmem σ grupy G. W kolejnym kroku buduje się algebraiczny model dla badanej klasy rozmaitości, którym jest „prosta, symplektyczna trójka k-symetryczna" $(\mathfrak{g}, \nu, \Omega)$. Zasadnicze fakty w tym rozdziale są adaptacją, a w pewnych przypadkach uogólnieniem faktów zaczerpniętych ze wspomnianej monografii O. Kowalskiego, a przy włączeniu do rozważań struktury symplektycznej autor wykorzystuje pomysł z poświęconej symplektycznym przestrzeniom symetrycznym (tzn. przypadkowi $k = 2$) pracy P. Bieliavsky'ego.

Niestety, także i w tej części zbytnia zwięzłość, a może pośpiech przy redagowaniu pracy skutkuje niejasnością pewnych fragmentów. I tak, Definicja 3.10 brzmi *in extenso* tak: „Parę $(\mathfrak{g}, \nu)$ będziemy nazywali dwójką k-symetryczną". Jedynie z kontekstu objaśnień do poprzedzającej Definicji 3.9 udało się piszącemu te słowa z pewnym wysiłkiem dojść do przypuszczenia, że owo k jest rzędem albo endomorfizmu $A = (\mathrm{id} - \nu)$, albo automorfizmu ν, nie umiał on jednak rozstrzygnąć, które z tych przypuszczeń jest poprawne([1]). Przy definicji centralnego dla rozprawy pojęcia wymagana byłaby większa staranność. Jeszcze wcześniej, w Definicji 3.1 autor określa, co będzie nazywane w dlaszym ciągu „regularną s-rozmaitością symplektyczną", a jeszcze na tej samej stronie w Twierdzeniu 3.2 mówi o „regularnych symplektycznych s-rozmaitościach symetrycznych", nie precyzując, czy i ew. co wnosi ta dodatkowa przydawka. Dowody

[1] Z opublikowanej w międzyczasie pracy (wspólnej z promotorem) opartej na rozprawie, można wywnioskować, że chodzi o rząd automorfizmu ν, co wskazuje, że użyty w wierszu 11 od góry na str. 17 rozprawy termin „endomorfizm" powinien byc zastąpiony terminem „automorfizm".

w tej części pracy są w najlepszym przypadku szkicowane, w większości zastępuje je referencja do monografii Kowalskiego.

Centralną częścią rozprawy, zawierającą oryginalny wkład autora, są Rozdziały 4 i 5, zatytułowane odpowiednio „Trójki symplektyczne i elementy injektywne" oraz „Klasyfikacja przestrzeni symplektycznych". Rozdział 4 należałoby właściwie zatytułować „Dwójki symplektyczne i elementy injektywne", gdyż główny wynik tego rozdziału, Twierdzenie 4.2 mówi o „dwójkach symplektycznych", podobnie jak podsumowująca ten rozdział Uwaga 4.2, a pojęcie „trójki symplektycznej" jest wspomniane mimochodem tylko raz w całym rozdziale.

Rozdział 5 pracy jest najciekawszy i przynosi najgłębsze wyniki. Jego zwieńczeniem jest pełna klasyfikacja prostych, jednospójnych, regularnych 3-symetrycznych rozmaitości symplektycznych. Tu autor wykorzystuje klasyfikację prostych i jednospójnych 3-symetrycznych rozmaitości podaną w klasycznej pracy A. Graya i J. Wolfa z 1968 roku. Wyniki przedstawione są w Tabelach 1 – 3 zawartych na stronach 32–35. Klasyfikacja ta wyprowadzona jest przez badanie centrum odpowiedniej algebry Liego i wykazanie, że zawiera ona element injektywny, zgodnie z Twierdzeniem 4.2.

Na ile mi wiadomo, wyniki zawarte w rozprawie mgr Macieja F. Bocheńskiego są nowe. Z pewnością przynoszą istotny postęp w zakresie wiedzy o jednorodnych przestrzeniach symplektycznych z dodatkową strukturą uogólnionych symetrii. Dlatego mimo przedstawionych zastrzeżeń, które jednak wszystkie mają charakter redakcyjny, moja ogólna ocena rozprawy jest zdecydowanie pozytywna.

Stwierdzam, że rozprawa spełnia wszystkie wymogi Ustawy o Stopniach Naukowych i Tytule Naukowym. Wnoszę o przyjęcie pracy mgr Macieja F. Bocheńskiego zatytułowanej *Uogólnione, Symplektyczne Przestrzenie Symetryczne* jako rozprawy doktorskiej i o dopuszczenie jej autora do publicznej obrony rozprawy.

dr hab. Aleksander Strasburger