Recenzja

rozprawy doktorskiej mgr. Piotra Jastrzębskiego

Formy Clifforda–Kleina pewnych przestrzeni jednorodnych

W słynnym programie erlangeńskim wygłoszonym w 1872 roku Felix Klein uwypuklił znaczenie grup przekształceń (symetrii) dla badania struktur geometrycznych. We współczesnej geometrii funkcjonuje całe spektrum modeli geometrycznych, na jednym końcu którego znajdują się jednorodne modele, czyli przestrzenie jednorodne G/H wyposażone w strukturę geometryczną zachowywaną przez naturalne działanie grupy G na G/H, na drugim zaś – niejednorodne modele, które w ogólności mogą mieć bardzo biedną grupę symetrii, nawet rozumianą lokalnie. Z tego względu badanie ostatnich jest trudniejsze.

Formy Clifforda–Kleina $\Gamma\backslash G/H$, które są przedmiotem recenzowanej rozprawy, pozwalają w oparciu na modele jednorodne G/H na tworzenie modeli geometrycznych, które z jednej strony nie są już jednorodne, czyli leżą już wewnątrz wspomnianego spektrum, ale z drugiej strony mają bogate lokalne grupy symetrii, co ułatwia ich badanie.

Prawdopodobnie powyższy fakt spowodował spore zainteresowanie tą tematyką w świecie matematycznym. Na hasło „Clifford–Klein form" *Google* znajduje 957 000 wyników. Przedmiotem tym zajmowali się w szczególności klasycy A. Borel oraz T. Kobayashi. Nie brakuje też „bardzo świeżych" publikacji na wspomniany temat. Wśród ostatnich wymienimy tylko pracę T. Okudy [18] [1], która ukazała się w roku 2013 w *Journal of Differential Geometry* i tematycznie a nawet technicznie jest bardzo powiązana z tematyką rozprawy mgr. Jastrzębskiego.

Podstawowym problemem w tej teorii jest znalezienie zwartych form Clifforda–Kleina, czyli innymi słowy dyskretnych podgrup Γ w grupie Liego G takich, że działanie Γ na przestrzeni jednorodnej G/H jest wolne i właściwie nieciągłe, a odpowiednia rozmaitość ilorazowa $\Gamma\backslash G/H$ jest zwarta. Dla niektórych przestrzeni jednorodnych takie formy mogą nie istnieć, więc następnym pytaniem podstawowym jest zagadnienie istnienia zwartych form Clifforda–Kleina. Klasyczne wyniki dają pozytywną odpowiedź na to pytanie w przypadku zwartej podgrupy H. Dla niezwartej H nie ma wyczerpującej odpowiedzi, istnieją tylko częściowe wyniki dla różnych klas przestrzeni jednorodnych.

T. Kobayashi zaproponował [13] zamiast dyskretnej podgrupy Γ używać domkniętej podgrupy Liego $L \subset G$, która działa właściwie na G/H, a następnie szukać dyskretnych podgrup $\Gamma \subset L$, które uzwarcają G/H. Najprostszą półprostą domkniętą podgrupą jest $SL(2,\mathbb{R})$. Dlatego naturalnym problemem jest znalezienie przestrzeni jednorodnych G/H z właściwym działaniem podgrupy $SL(2,\mathbb{R}) \subset G$. Klasyfikacja półprostych przestrzeni symetrycznych z takim działaniem została uzyskana we wspomnianym artykule Okudy. Natomiast praca doktorska P. Jastrzębskiego poświęcona jest rozszerzeniu tych wyników w dwóch kierunkach.

Pierwszy z tych kierunków to badanie istnienia właściwego działania $SL(2,\mathbb{R})$ w przypadku, gdy podgrupa H ma rzeczywisty rząd 1, czyli jest minimalnie „oddalona" od przypadku zwartego. Twierdzenie 1.1 daje konieczne i wystarczające warunki istnienia takiego działania w terminach tzw. rzędu a-hiperbolicznego. Ostatni był wprowadzony w pracy Bocheńskiego i Tralle [3] (ale w sposób niejawny pojawił się też u Okudy) i jest efektywnie wyliczanym niezmiennikiem rzeczywistej grupy Liego.

[1] tu i dalej numeracja referencji odnosi się do tej z recenzowanej rozprawy

Drugi kierunek podaje pewne dostateczne warunki istnienia właściwego działania $SL(2,\mathbb{R})$ wyrażone w terminach ograniczonych układów pierwiastkowych grup G i H (Twierdzenie 1.2) lub odpowiednich układów pierwiastków prostych (Twierdzenie 1.3).

Warto zauważyć, że wnioskiem ze wspomnianych twierdzeń jest znaczny zapas przykładów przestrzeni jednorodnych z właściwym działaniem $SL(2,\mathbb{R})$ a w konsekwencji zwartych form Clifforda–Kleina, który istotnie rozszerza istniejącą w literaturze listę przykładów.

Twierdzenia 1.1, 1.2 i 1.3 stanowią główne wyniki pracy, która przedstawia też ich szczegółowy dowód. Ponadto praca zawiera rzetelne wprowadzenie do tematyki form Clifforda–Kleina i stopniowo przygotowuje czytelnika do zrozumienia technicznych szczegółów dowodu.

W całości, pomimo krytycznych uwag, które będą przedstawione poniżej i które dotyczą raczej nielicznych nieścisłości stylistycznych oraz pomyłek druku, rozprawa pokazuje wysoką erudycję mgr. P. Jastrzębskiego w dziedzinie grup i algebr Liego oraz opanowanie przez niego technicznych narzędzi niezbędnych do prowadzenia konkurencyjnej działąlności badawczej.

Dodamy, że tematyce form Clifforda–Kleina poświęcona jest praca P. Jastrzębskiego [7] (we współautorstwie z A. Tralle), która jest przyjęta do druku w *Journal of Physics: Conference Series* i wyniki której nie pokrywają się z wynikami recenzowanej rozprawy doktorskiej.

Podsumowując uważam, że wyniki pracy są ważne i aktualne a ich autor, mgr. Piotr Jastrzębski, wykazał się wystarczającą dojrzałością naukową. Wnioskuję o jego dopuszczenie do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Uwagi krytyczne

Uwagi merytoryczne

Przykłady wynikające z Twierdzenia 1.2 podane w Podrozdziale 8.1 dotyczą tzw. przypadków rozszczepialnych czyli takich, dla których odpowiednie diagramy Satake posiadają tylko białe wierzchołki. Niektóre z tych przykładów mogą być uzyskane też jako wynikające z Twierdzenia 1.3 (np. dla $(R, R', (R')^{\perp})$ równych $(A_{n-1}, A_{k-1}, A_{n-k-1}), (B_n, D_k, B_{n-k})$). Wydaje się, że należałoby poszukać nierozszczepialnych przykładów wynikających z Twierdzenia 1.2. Obecność czarnych wierzchołków w odpowiednich diagramach Satake jest dodatkową przeszkodą, ale pozwoliłoby to na wykorzystanie całego potencjału Twierdzenia 1.2. Uwaga ta jest jednocześnie sugestią dalszych kierunków badań.

str. 31, 32, 33 - obiekt $\mathfrak{b}$ nie był określony wcześniej. Jego definicja najprawdopodobniej pokrywa się z tą z pracy [18], ale w rozprawie została pominięta

str. 37 - Na początku Podrozdziału 7.3 używa się pojęcia ważonego diagramu Dynkina nilpotentnej orbity rzeczywistej, które nie było określone wcześniej (pojawiło się tylko analogiczne pojęcie dla zespolonyh orbit).

str. 39, lin. 13 - obiekt $\mathfrak{z}_{\Sigma}$ nie określony wcześniej

„Niezgrabne" sformułowania lub stylistyczne nieścisłości

str. 7 - Pojęcie „ półprostej podgrupy typu parabolicznego" użyte w formułowaniu Twierdzenia 1.3 dobrze byłoby wyjaśnić we wstępie lub w Rozdziale 2 dotyczącym grup i algebr Liego. W obecnej wersji ono zostaje wyjaśnione dopiero w dowodzie twierdzenia.

str. 20, lin. 2 - „inwolucja rzędu 2"

str. 20 - w Twierdzeniu 4.2 nieprecyzyjne sformułowanie we frazie „dopuszcza działania"

str. 23 - zbędne słowo „sumą" w ostatnim zdaniu przedostatniego akapitu str. 24, przedostatnie zdanie - „różniczka będzie następująca” -> „różniczka będzie oznaczana”

str. 31, we wzorze w ostatniej linijce diagram należałoby rozszerzyć o jeden krok

str. 36, pierwsze zdanie ostatniego akapitu - „algebrze Liego o zwartym centrum $\mathfrak{m}$” -> „algebrze Liego $\mathfrak{m}$ o zwartym centrum”

str. 36, drugie zdanie ostatniego akapitu - „jeśli rząd rzeczywisty wynosi 1” – rząd rzeczywisty czego?

Pomyłki druku

str. 6, lin. 4 - zbędny odstęp po przecinku

str. 17, lin. 11 - brak gwiazdki nad j we wzorze $r : \mathfrak{j} \to \mathfrak{a}^*$

str. 21, lin.7 - „algebr” -> "algebrach"

str. 21, lin. 10 - „Kodołączoną” -> „Dołączoną”

str. 25, lin. 16 - $d_1 + d_2 + \ldots + d_k = 0$ -> $d_1 + d_2 + \ldots + d_k = n$

str. 37, ostatnia linijka - $F = \sum_{\alpha \in \Pi_1} F_{-\alpha}$ -> $F = \sum_{\alpha \in \Pi_1} a_\alpha F_{-\alpha}$

str. 39, lin. 2, 3 - „if” -> „jeśli”

str. 40, przedostatnia linijka - „Tej” -> „Z tej”

str. 42, lin. 3 - „twierdzenia 1.2” -> „twierdzenia 1.3”

str. 42, lin. 12 - „ortogonalna” -> „ortogonalny”

Wzory matematyczne zwykłą czcionką na str. 4, lin. 22.

Błędne użycie zwykłej czcionki we wskaźnikach zamiast czcionki „mathfrak” na str. 36 i 37.

A. Panasyuk

Andriy Panasyuk
Dr hab., prof. UWM

Recenzja

rozprawy doktorskiej mgr. Piotra Jastrzębskiego

Formy Clifforda–Kleina pewnych przestrzeni jednorodnych

(II wersja z dnia 29 listopada 2015 r.)

W związku z wymogiem prof. S. Jackowskiego, drugiego recenzenta rozprawy mgr. P. Jastrzębskiego, jej pierwsza wersja została dopracowana przez autora. Z powodu zmian poczynionych w rozprawie poniżej przedstawiam swoją opinię o nowej jej wersji, którą jednak należy uważać za uzupełniającą względem mojej opinii o pierwszej wersji pracy wcześniej przedstawionej Radzie Wydziału Matematyki i Informatyki UWM w Olsztynie.

Struktura w drugiej wersji została zachowana – praca składa się ze Wstępu i 7 rozdziałów, które z reguły mają te same tytuły. Wyjątek stanowią Rozdziały 2, 3 i 5, których tytuły są bliskie tym z poprzedniej wersji. Właśnie w tych rozdziałach autor dokonał największych zmian – one zostały istotnie uzupełnione. Dodany materiał jest dosyć obszerny (w sumie objętość pracy wzrosła z 45 do 63 stron) a zawiera głównie wprowadzające pojęcia i wyniki z teorii grup i algebr Liego pomagające czytelnikowi lepiej zorientować się w przestrzeni rozprawy i zrozumieć jej podstawowe wyniki. Pozostałe zmiany poczynione w pracy noszą głównie redakcyjny charakter (w szczególności one uwzględniają uwagi krytyczne obydwu recenzentów do pierwszej wersji). Muszę wyznać, że w nowej wersji praca zyskała na czytelności, chociaż nowa redakcja niestety też jest daleka od doskonałości. Poniżej przedstawię listę zauważonych przeze mnie usterek.

W całości, podtrzymuję swoje stanowisko, które wyraziłem w recenzji pierwszej wersji pracy, czyli uważam, że wyniki pracy są ważne i aktualne a ich autor, mgr. Piotr Jastrzębski, wykazał się wystarczającą dojrzałością naukową. Wnioskuję o jego dopuszczenie do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Uwagi krytyczne

„Niezgrabne" sformułowania, stylistyczne nieścisłości, pomyłki druku

str. 12 - macierz J została pomyłkowo zdefiniowana 2 razy

str. 15 - zbędna fraza „algebra Liego" w lin. 20

str. 15 - „abelowej" -> „półprostej" w lin. 25

str. 16 - w Definicji 2.24 należałoby raczej użyć terminu „podalgebra reduktywna w ..." niż „podalgebra reduktywna", gdyż pierwszy termin jest standardowy, a ponadto jest stosowany później w pracy na str. 32

str. 18 - w lin. 5 należy dodać „istnieje $H_\alpha \in \mathfrak{j}$ taki, że"

str. 18 - zdanie w Definicji 2.34 nie ma sensu

str. 22 - w ostatniej lin.: s_{i_j} -> $s_{\alpha_{i_j}}$

str. 23 - w Twierdzeniu 2.51 należy określić czym jest w

str. 23 - w Twierdzeniu 2.52: „spełniają następujące warunki" lub „mają następujące własności"

str. 25 - nie wyjaśniony został sens liczb przy wierzchołkach diagramu Satake str. 27, 28 - w Definicjach 3.7 i 3.8 pomyłkowo użyto słowa „istnieje”: przymiotnik następujący po nim stosuje się do konkretnego odwzorowania (działania grupy)

str. 30, 31, 32 - błędne użycie terminu „dyfeomorfizm na siebie”: odpowiednie rozmaitości a priori są różne

str. 31 - lin. 10: $\mathfrak{t}$ -> $\mathfrak{k}$

str. 31 - po Twierdzeniu 3.21 pojawiło się pojęcie „maksymalna abelowa podprzestrzeń”, które nie było zdefiniowane wcześniej. Przedtem używana była terminologia „maksymalna abelowa podgrupa”

str. 32 - wydaję się, że w ostatnim zdaniu 1-go akapitu druga równość jest wnioskiem pierwszej, nie można więc używać spójnika „oraz”

str. 32 - w definicji $Z_K(\mathfrak{a})$ w Definicji 3.25: $Ad(k)|_{\mathfrak{a}}$

W dodatku do powyższego muszę zauważyć, że autor pracy nie ustosunkował się do niektórych krytycznych uwag, które zrobiłem w recenzji pierwszej wersji pracy, chociaż miał taką możliwość. Być może przyczyną było nieprecyzyjne ich sformułowanie. Poniżej powtarzam te uwagi w odniesieniu do nowej wersji pracy w nieco zmienionym formułowaniu, gdyż nadal uważam je za istotne.

str. 38 - w ostatnim zdaniu przedostatniego akapitu: „wymiar a-hiperboliczny” prawdopodobnie ma być „rzędem a-hiperbolicznym”, a fraza „wymiar a-hiperboliczny $\mathfrak{h}$ jest sumą $\mathrm{rank}_{a-hyp}([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])$” nie ma sensu

str. 41 - w twierdzeniu 5.5: „różniczka będzie następująca” -> „różniczka będzie oznaczana”

str. 48 - we wzorze w ostatniej linijce diagram należałoby rozszerzyć o jeden wierzchołek o współczynniku a_4; poprawiłoby to czytelność diagramu

str. 54 - pierwszy akapit: „algebrze Liego o zwartym centrum $\mathfrak{m}$” -> „algebrze Liego $\mathfrak{m}$ o zwartym centrum”; w obecnym formułowaniu oznaczenie $\mathfrak{m}$ raczej odnosi się do centrum algebry niż do niej samej, co deformuje sens zdania

Następne zdanie: „jeśli rząd rzeczywisty wynosi 1” -> „jeśli rząd rzeczywisty $\mathfrak{m}$ (czy $\mathfrak{h}$?) wynosi 1”

A. Panasyuk

Andriy Panasyuk

Dr hab., prof. UWM