

Kraków, 15 maja 2017

*Prof. dr hab. Władimir Mituszew*

Instytut Informatyki

Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

### **Recenzja rozprawy doktorskiej**

Przedmiotem niniejszej recenzji jest rozprawa doktorska Pana magistra Mariusza Bodziocha, zatytułowana „*Oblique derivative problem for elliptic second-order equations in a domain with boundary conical point*”. Przewód doktorski jest prowadzony na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie. Recenzja została napisana na podstawie zlecenia i pisma WMiI.6350.1.2014 z dnia 01.03.2017.

Rozważana rozprawa doktorska dotyczy konstruktywnych asymptotycznych badań zagadnień brzegowych z ukośną pochodną dla liniowych i nieliniowych równań eliptycznych w obszarach z punktem stożkowym na brzegu. Są to zagadnienia o znaczeniu podstawowym oraz mają zastosowania w różnych dziedzinach mechaniki ośrodków ciągłych. Wielu matematyków badało istnienie i jednoznaczność rozwiązań rozważanych zagadnień. Odpowiedni przegląd podstawowych wyników został szczegółowo opisany w rozprawie i jest przedstawiony we wprowadzeniu i literaturze. Rozpatrywane zagadnienia są ważne dla zastosowań w zagadnieniach mechaniki ośrodków ciągłych oraz w modyfikacjach metody elementów skończonych i metody różnic skończonych dla obszarów niegładkich. Konieczność teoretycznych badań w metodach numerycznych wynika z osobliwości badanych pól fizycznych w otoczeniu punktów stożkowych brzegu, gdzie powstają, na przykład, koncentracja plastyczno-sprężystych naprężeń (napięć termicznych, elektrycznych itd), teoretycznie dążących do nieskończoności. Bez dokładnych analitycznych asymptotycznych badań nie ma możliwości oszacowania nawet typu osobliwości rozwiązania. Warto podkreślić, że określenie typu nieskończoności (potęgowa, logarytmiczna i inne) pozwala na zastosowanie algorytmów fitting (dopasowania) do modyfikacji skończonych elementów. Obecne pakiety numeryczne posiadają podobne implementacje, ale w bardzo ograniczonym zakresie. Rozważana rozprawa doktorska daje możliwość systematycznego opracowania osobliwości z zastosowaniem w pakietach rozwiązywania zagadnień przez metody numeryczne.

Uważam, że rozprawa doktorska Pana magistra Mariusza Bodziocha mieści się w aktualnym kierunku badań o istotnym znaczeniu aplikacyjnym, jakim jest badanie zagadnień z ukośną pochodną w obszarach z punktem stożkowym na brzegu, w zakresie teoretycznych podstaw modelowania pól fizycznych w obszarach z punktami osobliwymi.

Celem rozprawy doktorskiej było rozszerzenie i uogólnienie metod prof. W. Kondratiewa i prof. M. Borsuka dla zagadnień brzegowych na zagadnienia z niegładkim brzegiem, co rozwija i uogólnia klasyczne badania prof. W. Kondratiewa i prof. O. Oleinika (1983), prof. W. Kondratiewa i prof. M. Borsuka (2006) oraz prof. V. Maz'ya (1967).

Wprowadzenie (Introduction) opisuje ogólny stan wiedzy na temat eliptycznych równań w obszarach gładkich i niegładkich z poprawnym opisem ścieżki badań w obszarach gładkich. Mgr Mariusz Bodzioch zaczyna wprowadzenie od klasycznych prac Giraud i Schaudera, dalej opisuje wyniki Douglasa, Nirenberga, Mirandy, Ladyzhenskiej, Ural'cevej i innych, w płynny i uzasadniony sposób przechodzi do wyników Sobolewa, Kondratiewa i Borsuka dla obszarów niegładkich. Mgr Mariusz Bodzioch krótko i poprawnie opisał ścieżkę badań i logicznie wyjaśnił postawione zagadnienia i zakres badań rozprawy. Odrębną uwagę zwrócono na zastosowania zagadnień z ukośną pochodną do badania pola grawitacyjnego. Przy czym autor nie tylko podał standardową frazę typu „podobne zagadnienia mają zastosowania w dziedzinie ...”, lecz słusznie uzasadnił konkretne zastosowania geofizyczne z odpowiednimi wyjaśnieniami.

Rozdział pierwszy ma charakter wstępu, gdzie autor rozprawy wprowadził oznaczenia wykorzystywane w pracy, w tym szczegółowo opisane zostały obszary i przestrzenie funkcyjne. W rozdziale drugim autor opisał wartości i wektory (funkcje) własne, najmniejszą dodatnią wartość własną oraz nierówności typu Friedrichsa-Wirtingera. Wykazano, iż wartości własne spełniają transcendentne równanie liczbowe (2.2.29), które służy jako narzędzie nietrywialnego badania liniowych i nieliniowych zagadnień rozważanych w dalszej części rozprawy. Dalej w tym rozdziale udowodnione zostały inne nierówności typu Friedrichsa-Wirtingera, zawierające biegunową współrzędną  $r$ . Wyniki tego rozdziału są standardowe, chociaż Lematy 2.6 - 2.7 przedstawiają nowe spojrzenie na nierówności Friedrichsa-Wirtingera.

W rozdziale trzecim autor bada silne rozwiązania *liniowego* zagadnienia z ukośną pochodną. Współczynniki równania i warunków brzegowych spełniają pewne założenia, które mają charakter naturalny. Stosując uzyskane wcześniej nierówności, autor udowadnia lokalne oszacowanie na wartość szukanej funkcji przez funkcje wejściowe. Warto tutaj podkreślić, że w odróżnieniu od poprzedników, to oszacowanie i inne wyniki są udowodnione przy założeniu ciągłości względem Diniego, jak również bez tego założenia – w oparciu o bardzo ogólne warunki (a) - (d) podrozdziału 3.2, str. 36, oraz ciągłości funkcji w punkcie zerowym (punkt umieszczenia stożka). Jest to rozszerzone rozwiązanie problemu założeń na współczynniki eliptycznych równań, które nie było uwzględnione w poprzednich pracach. Warto także podkreślić, że autor wykorzystuje inne metody, różne od powszechnie uznanych metod klasycznych. Uzyskane wyniki są zastosowane do lokalnych całkowitych oszacowań. Ciekawy i prosty przykład funkcji, która nie spełnia warunku Diniego, ale pasuje pod rozważane warunki na współczynniki równań, kończy rozdział trzeci. W rozdziale trzecim mgr Mariusz Bodzioch opisał metodę badań klasy zagadnień z punktami osobliwymi, zaczynając od nierówności, poprzez całkowite oszacowania, aż do precyzyjnego opisu rozwiązań. Ta metoda, rozważana jako ścieżka badań, była już faktycznie wykorzystana przez prof. M. Borsuka i jego uczniów dla innych zagadnień. Jednak tutaj metoda jest usystematyzowana i sformalizowana do pewnego stopnia abstrakcji, co służy strategii uzyskania nowych wyników.

W czwartym rozdziale autor rozpatruje *semi-nieliniowe* zagadnienie z ukośną pochodną. Nieliniowość występuję w potęgach szukanej funkcji  $u$  w warunkach brzegowych. W podrozdziale 4.2., tak jak w przypadku liniowym, autor wprowadza naturalne założenia na współczynniki i znane funkcje. Schemat badania jest podobny do przypadku liniowego. Podstawowe dokładne wzory i oszacowania na funkcje są podane w Twierdzeniach 4.2 - 4.4.

Dalej na podstawie tych wyników są opisane lokalne i globalne całkowe oszacowania rozwiązań.

Podobną ścieżką idzie rozdział piąty, gdzie autor rozpatruje *quasi-nieliniowe* zagadnienie z ukośną pochodną. Nieliniowość występuje teraz nie tylko w potęgach szukanej funkcji  $u$  w brzegowych warunkach, ale i we współczynnikach równań eliptycznych. Istotną różnicą w porównaniu z poprzednimi wynikami jest używanie funkcji barierowej. Jest to standardowa metoda opracowana w pracach prof. M. Borsuka. Z drugiej strony, techniczne opracowanie odpowiednich nierówności wymaga zwrócenia znacznej uwagi na założenia i sporej umiejętności w wyprowadzeniu poprawnych oszacowań asymptotycznych. W rezultacie długich i żmudnych obliczeń powstają oczekiwane piękne nierówności (5.4.22) i (5.4.24) oraz całkowe oszacowania przedstawione w podrozdziale 5.5. Wyniki są zastosowane do oszacowania modułu ciągłości w podrozdziale 5.6 we wszystkich rozważanych przypadkach. Trzeba podkreślić, że systematyczne zastosowanie metody oszacowań rozwiązań z jednej strony zmierza do prostej nierówności, z drugiej strony zawiera czasami nietrywialne i pracochłonne kroki. Jest to zaleta często występująca w czystej matematyce, gdy istotne są pytania, na ile można uogólnić z pozoru proste nierówności.

Rozprawę kończy dodatek zawierający rozmaite nierówności oraz twierdzenia Sobolewa o włożeniach, zasadę maksimum i inne ważne twierdzenia oraz krótkie streszczenie w językach angielskim i polskim oraz indeks.

Bibliografia rozprawy liczy 176 pozycji.

Wszystkie wyniki pracy są poprawne. Nie znalazłem w niej żadnych istotnych uchybień, natomiast mam kilka ogólnych uwag krytycznych.

1. We wprowadzeniu poprawnie opisano zastosowania do badania pól grawitacyjnych ważnych w geofizyce. Aplikacyjna atrakcyjność rozprawy byłaby większa, gdyby autor opisał ogólne fizyczne zastosowania ukośnej pochodnej jako prawo fizyczne na powierzchni podziału faz, na przykład liniową lub nieliniową zależność strumienia od gradientu potencjału. Takie warunki brzegowe powstają w elektrodynamice, termodynamice, cieczech lepkich itd., gdy kontakt jest niedoskonały. Podobne zagadnienia są ważne w teorii metamateriałów. Autor rozprawy opisał ważne, ale nie innowacyjne, zastosowania zagadnień z ukośną pochodną.
2. Warto byłoby podać zwięzłą metodę opisu własności rozwiązań na abstrakcyjnym poziomie typu geometrycznego programu Erlangera. Bowiem autor faktycznie zbadał nie tylko konkretne zagadnienie, ale podał ogólną ścieżkę (metodę) badania ogólnej klasy zagadnień.
3. Warto było by rozróżnić, jakie twierdzenia i lematy rozprawy są udowodnione według standardowej ścieżki, i podać odpowiednią literaturę, a jakie dowody posiadają nową ideą. Albo można było by w streszczeniu napisać dowody jakich twierdzeń są istotnie nowymi.

Podane powyżej uwagi krytyczne nie pomniejszają wartości pracy.

Uważam, że praca jest merytorycznie poprawna, zawiera nowe i wartościowe wyniki matematyczne związane z podstawowym pytaniem o możliwość rozszerzenia wyników teorii zagadnień liniowych na zagadnienia nieliniowe. Stanowi ona oryginalne rozwiązanie problemu naukowego z zakresu teorii zagadnień brzegowych z ukośnymi pochodnymi dla ogólnych równań eliptycznych w obszarach z punktem osobliwym na brzegu. Autor wykazuje

się w niej znaczną wiedzą teoretyczną z badanej dziedziny oraz umiejętnością prowadzenia badań naukowych. Rozprawa jest starannie napisana, poprawnie wyjaśnia dość skomplikowane techniczne pytania z wieloparametrycznymi założeniami na funkcje i obszary. Podsumowując, uważam, że recenzowana rozprawa doktorska spełnia warunki ustawowe i zasługuje na wyróżnienie. Tym samym wnoszę o dopuszczenie magistra Mariusza Bodziocha do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

**Uważam, że recenzowana Rozprawa Doktorska zasługuje na wyróżnienie.**



Prof. dr hab. Władimir Mituszew